2022级高一暑假数学衔接作业

和（差）的立方公式、立方和（差）公式

1. 完全立方和公式：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

证明：$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

变形1：$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$；

变形2：$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2-ab)$.

2. 完全立方差公式：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

证明：$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

变形1：$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

完全立方公式的推广：

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\times(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2\\=&(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)\times(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2+2x_1x_2+2x_2x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n)\\=&x_1^3+x_2^3+x_3^3+\cdots+x_n^3+3x_1^2x_2+3x_2^2x_3+\cdots+3x_{n-1}^2x_n\end{aligned}$$

3. 立方和公式：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

证明：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2=a^3+b^3$

4. 立方差公式：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

证明：$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\begin{aligned}&=[a+(-b)][a^2-a(-b)+b^2]\\&=a^3+(-b)^3\\&=a^3-b^3\end{aligned}$$

例1：分解因式（1）x^3-64　（2）$\frac{1}{8}a^3+b^3$　（3）$m^6-2m^3n^3+n^6$　（4）x^3-7x+6

例2：利用公式计算：$2012^3-2010^3-6\times2012^2+24\times1005$

例3：利用公式解决实际问题

已知矩形的周长为28，相邻的两边分别为x、y且满足$x^3+x^2y-xy^2-y^3=0$，求这个矩形的面积？

十字相乘法

一．选择题

1．把多项式 x^2+x-2 分解因式，下列结果正确的是（　　）

A．$(x+2)(x-1)$　　B．$(x-2)(x+1)$　　C．$(x-1)^2$　　D．$(2x-1)(x+2)$

2．下列因式分解正确的是（　　）

A．$4m^2-4m+1=4m(m-1)$　　B．$a^3b^2-a^2b+a^2=a^2(ab^2-b)$

C．$x^2-7x-10=(x-2)(x-5)$　　D．$10x^2y-5xy^2=5xy(2x-y)$

3．把多项式 $(x-y)^2-2(x-y)-8$ 分解因式，正确的结果是（　　）

A．$(x-y+4)(x-y+2)$　　B．$(x-y-4)(x-y-2)$

C．$(x-y-4)(x-y+2)$　　D．$(x-y+4)(x-y-2)$

二．填空题

4．若对于一切实数 x，等式 $x^2-px+q=(x+1)(x-2)$ 均成立，则 p^2-4q 的值是________.

5．分解因式：$x^2-3xy-4y^2=$_______________.

6．若 $x^2+mx-15=(x+3)(x+n)$，则 $m-n$ 的值为____________.

7．若 x^2+mx+n 分解因式的结果是 $(x+2)(x-1)$，则 $m+n$ 的值为_________.

8．阅读下列文字与例题：将一个型如 x^2+px+q 的二次三项式因式分解时，如果能满足 $q=mn$ 且 $p=m+n$，则可以把 x^2+px+q 因式分解成 $(x+m)(x+n)$.

例如（1）$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$　　（2）$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$.

要使二次三项式 x^2+mx-6 能在整数范围内分解因式，则 m 可取的整数为_____________.

9．多项式 $kx^2-9xy-10y^2$ 可分解因式得 $(mx+2y)(3x-5y)$，则 $k=$____，$m=$____.

三．解答题

10．李伟课余时间非常喜欢研究数学，在一次课外阅读中遇到一个解一元二次不等式的问题：$x^2-2x-3>0$.

经过思考，他给出了下列解法：左边因式分解可得：$(x+1)(x-3)>0$，

$\begin{cases}x+1>0\\x-3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1<0\\x-3<0\end{cases}$，解得 $x>3$ 或 $x<-1$.

聪明的你，请根据上述思想求一元二次不等式的解集：$(x-1)(x-2)(x-3)>0$.

一元二次方程

例1：关于x的一元二次方程$x^2-4x+k-5=0$.

（1）k为何值时，方程有两个不相等的实数根？

（2）k为何值时，方程有两个相等的实数根？

（3）k为何值时，方程没有实数根？

例2：:求证：关于x的方程$(m^2+1)x^2-2mx+(m^2+4)=0$没有实数根.

练习

1． 已知一元二次方程$a(x+m)^2+n=0$（$a\neq0$）的两根分别为－3，1，则方程$a(x+m-2)^2+n=0$（$a\neq0$）的两根分别为（　　）

A．1，5　　B．－1，3　　C．－3，1　　D．－1，5

2． 对于一切正整数n，关于x的一元二次方程$x^2-(n+3)x-3n^2=0$的两个根记为a_n、b_n，则$\dfrac{1}{(a_1-3)(b_1-3)}+\dfrac{1}{(a_2-3)(b_2-3)}+\cdots+\dfrac{1}{(a_9-3)(b_9-3)}=$__________.

3． 已知a是方程$x^2-2013x+1=0$一个根，求$a^2-2012a+\dfrac{2013}{a^2+1}$的值为________.

4．已知关于x的一元二次方程：$x^2-(2k+1)x+4(k-\dfrac{1}{2})=0$.

（1）求证：这个方程总有两个实数根；

（2）若等腰△ABC的一边长$a=4$，另两边长b、c恰好是这个方程的两个实数根，求△ABC的周长.

5．今年奉节脐橙喜获丰收，某村委会将全村农户的脐橙统一装箱出售．经核算，每箱成本为40元，统一零售价定为每箱50元，可以根据买家订货量的多少给出不同的折扣价销售．

（1）问最多打几折销售，才能保证每箱脐橙的利润率不低于10%？

（2）该村最开始几天每天可卖5000箱，因脐橙的保鲜周期短，需要尽快打开销路，减少积压，村委会决定在零售价基础上每箱降价$3m\%$，这样每天可多销售$\dfrac{20}{3}m\%$；为了保护农户的收益与种植积极性，政府用“精准扶贫基金”给该村按每箱脐橙m元给予补贴进行奖励，结果该村每天脐橙销售的利润为49000元，求m的值．

6．某商店将进货价为8元/件的商品按10元/件售出，每天可售200件，通过调查发现，该商品若每件涨0.5元，其销量就减少10件．

（1）请你帮店主设计一种方案，使每天的利润为700元．

（2）将售价定为多少元时，能使这天利润最大？最大利润是多少元？

一元二次不等式

1. 一元二次不等式的定义：形如$ax^2+bx+c>0$（或<0）（其中$a\neq 0$）的不等式称为关于x的一元二次不等式.

2. 一元二次不等式的解法：

方法一、（因式分解法）按照以下步骤处理

（1）化二次项系数为正数；

（2）若二次三项式能分解成两个一次因式的积，则求出两根x_1、x_2，那么“>0”型的解集为$x<x_1$或$x>x_2$（两根之外），“<0”型的解集为$x_1<x<x_2$（两根之间）；

（3）对两次三项式进行配方，变成$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，结合完全平方式为非负数的性质求解.

方法二、（图像法）结合对应的二次函数、一元二次方程求解，步骤如下：

（1）将二次项系数先化为正数；（2）观察相应的二次函数图像.

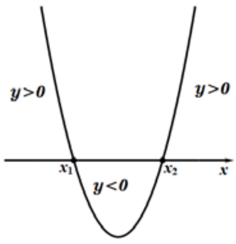

图1

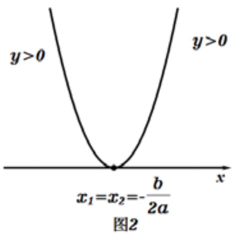

图2

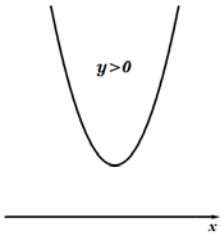

图3

①如果图像与x轴有两个交点$(x_1,0),(x_2,0)$，此时对应的一元二次方程有两个不相等的实数根x_1、x_2（也可以由根的判别式$\triangle>0$来判断）.

那么，如图 1 所示：$\begin{cases}ax^2+bx+c>0(a>0)\Longleftrightarrow x<x_1\text{或}x>x_2\\ ax^2+bx+c<0(a>0)\Longleftrightarrow x_1<x<x_2\end{cases}$；

②如果图像与x轴只有一个交点$\left(-\frac{b}{2a},0\right)$，此时对应的一元二次方程有两个相等的实数根$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$（也可以由根的判别式$\triangle=0$来判断）.

那么，如图 2 所示：$\begin{cases}ax^2+bx+c>0(a>0)\Longleftrightarrow x\neq-\dfrac{b}{2a}\\ ax^2+bx+c<0(a>0)\Longleftrightarrow \text{无解}\end{cases}$；

③如果图像与x轴没有交点，此时对应的一元二次方程没有实数根，（也可以由根的判别式$\triangle<0$来判断）.

那么，如图 3 所示：$\begin{cases}ax^2+bx+c>0(a>0)\Longleftrightarrow x\text{取任意实数}\\ ax^2+bx+c<0(a>0)\Longleftrightarrow \text{无解}\end{cases}$.

例 1： 利用二次函数的图像，解一元二次不等式$x^2+x-6>0$和$x^2+x-6<0$.

练习

1. 若$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$无解，则a,b,c应满足（　　）

A. $a>0,\triangle\leqslant 0$　　B. $a>0,\triangle>0$　　C. $a<0,\triangle<0$　　D. $a<0,\triangle\leqslant 0$

2. 若$2x^2-5x+2<0$，则$\sqrt{4x^2-4x+1}+2|x-2|=$____________________.

3. 解下列不等式（1）$(x+2)(x-3)<6$　　（2）$(x-1)(x+2)\leqslant(x-2)(2x+1)$

4 解下列一元二次不等式

（1）$-x^2+x+6\leqslant 0$　　（2）$x^2+1>4x-3$

（3）$(2x-1)^2+(x-1)^2\geqslant x$　　（4）$4<|2x-3|\leqslant 7$

6．若关于 x 的不等式 $ax^2+bx-1>0$ 的解集是$\{x|1<x<2\}$，则不等式 $bx^2+ax-1<0$ 的解集是（　　）

A. $\left\{x\middle|-1<x<\dfrac{2}{3}\right\}$　B. $\left\{x\middle|x<-1或x>\dfrac{2}{3}\right\}$　C. $\left\{x\middle|-\dfrac{2}{3}<x<1\right\}$　D. $\left\{x\middle|x<-\dfrac{2}{3}或x>1\right\}$

7．若不等式$|8x+9|<7$ 和不等式 $ax^2+bx-2>0$ 的解集相同，则 $a+b=$_______.

8．若不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是$\left\{x\middle|\dfrac{1}{2}<x<2\right\}$（1）求不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$ 的解集.

（2）已知二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\left\{x\middle|x<\dfrac{1}{3}或x>\dfrac{1}{2}\right\}$，求关于 x 的不等式 $cx^2-bx+a>0$ 的解集.

9．若 $a\in\mathbf{R}$，解关于 x 的不等式 $ax^2+(a+1)x+1>0$.

分式不等式

分式不等式的解法主要就是通过讨论分子和分母的符号求不等式的解集：

1.分式不等式的定义：如$\frac{f(x)}{g(x)}>0$或$\frac{f(x)}{g(x)}<0$（其中$f(x)$、$g(x)$为整式且$g(x)$不为0）的不等式称为分式不等式；

2.分式不等式的解法：

①根据分式不等式的符号，确定分子和分母是同号还是异号；

②根据分子和分母的符号列出不等式组；

③求出不等式组的解集，即为原分式不等式的解集.

例1：标准型分式不等式的解法　　解不等式：$\dfrac{2x-3}{x+1}<0$

例2：非标准型分式不等式的解法　　不等式$\dfrac{2x+1}{x+2}<1$的解集是　（　　）

A.$\{x\mid x<1\}$　B.$\{x\mid x<-1\}$　C.$\{x\mid -2<x<1\}$　D.$\{x\mid x>1或x<-2\}$

练习

1.　不等式$\dfrac{x+1}{x-1}>0$的解集是　（　　）

A.$\{x\mid x>-1\}$　B.$\{x\mid -1<x<0\}$　C.$\{x\mid x>1\}$　D.$\{x\mid x>1或x<-1\}$

2.　与不等式$\dfrac{x-2}{x+3}>0$同解的不等式是　（　　）

A.$(x-2)(x+3)>0$　B.$(x-2)>0$　C.$(x-2)(x+3)<0$　D.$(x+3)>0$

3.不等式$\dfrac{2-x}{x+4}>0$的解集是_________.　　4.不等式$\dfrac{x-1}{x+2}>1$的解集是__________.

5.解不等式

（1）$\dfrac{3x+1}{3-x}>-1$　（2）$\dfrac{2x-3}{3x-4}\leq 2$　（3）$\dfrac{x+3}{x^2+1}\geqslant 1$